M 8

E.N.S. ULM & SEVRES 1978

GROUPE A

ÉPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES

Soit x_i, $0 \leqslant i \leqslant q$, des points distincts de $\mathbb{R}$.

À une fonction réelle f définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant tous les points x_i, $0 \leqslant i \leqslant q$, on associe le *polynôme d'interpolation* Πf *de la fonction* f *aux points* x_i, $0 \leqslant i \leqslant q$, qui est, par définition, le polynôme (à coefficients réels) de degré $\leqslant q$ qui vérifie

$$\Pi f(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant q.$$

On se propose d'étudier, d'une part, la construction pratique d'un tel polynôme (Partie I) et, d'autre part, la convergence (Partie II) ou la divergence (Partie III) de ce procédé d'interpolation lorsque le nombre des points x_i tend vers l'infini.

NOTA. — *Les parties* I, II, *et* III, *sont indépendantes.*

I

1° Montrer l'existence et l'unicité du polynôme Πf.

2° Soit x_λ et x_μ deux points distincts de l'ensemble $\bigcup_{i=0}^{q} \{x_i\}$. On note p_λ l'unique polynôme de degré $\leqslant (q-1)$ qui vérifie

$$p_\lambda(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant q, \quad i \neq \lambda,$$

et on note p_μ l'unique polynôme de degré $\leqslant (q-1)$ qui vérifie

$$p_\mu(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant q, \quad i \neq \mu.$$

Montrer que

$$\Pi f(x) = \frac{(x_\lambda - x)\,p_\lambda(x) - (x_\mu - x)\,p_\mu(x)}{x_\lambda - x_\mu}.$$

.../...

3° On définit la suite de polynômes

$$p_i^l, \quad 1 \leqslant l \leqslant i \leqslant q,$$

par les relations de récurrence :

$$p_i^1(x) = \frac{(x_i - x) f(x_0) - (x_0 - x) f(x_i)}{x_i - x_0}, \quad 1 \leqslant i \leqslant q,$$

$$p_i^{m+1}(x) = \frac{(x_i - x) p_m^m(x) - (x_m - x) p_i^m(x)}{x_i - x_m}, \quad 2 \leqslant m + 1 \leqslant i \leqslant q.$$

Montrer que

$$\Pi f = p_q^q.$$

II

4° On suppose que la fonction f est $(q + 1)$ fois dérivable sur un intervalle I contenant les points x_i, $0 \leqslant i \leqslant q$. Étant donné un point quelconque x de l'intervalle I, montrer qu'il existe (au moins) un point $\xi \in I$ tel que

$$f(x) - \Pi f(x) = \frac{1}{(q+1)!} \prod_{i=0}^{q} (x - x_i) f^{(q+1)}(\xi).$$

5° Donner un exemple de fonction f différente d'un polynôme, définie sur un intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, tel que l'expression

$$\sup_{x \in I} | f(x) - \Pi f(x) |$$

tende vers 0 lorsque le nombre des points x_i tend vers l'infini.

III

6° On se donne $(n + 1)$ points distincts $x_j \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant n$, et on note Πf le polynôme d'interpolation de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

aux points x_j et $-x_j$, $0 \leqslant j \leqslant n$

(donc en $(2n + 1)$ points, ou en $(2n + 2)$ points, selon que l'un des points x_j est nul, ou non). Montrer que le polynôme Πf est pair (par suite, dans l'un et l'autre cas, il est de degré $\leqslant 2n$).

7° Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \Pi f(x) = f(x) \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{x_j^2 - x^2}{x_j^2 + 1} \right),$$

la fonction f étant définie comme au 6°.

8° Soit ξ et a deux nombres vérifiant

$$0 \leqslant \xi \leqslant a, \quad 0 < a.$$

Étant donné un nombre $h > 0$, on note x_j, $0 \leqslant j \leqslant n_h$, tous les points distincts de l'intervalle $[0, a]$ qui sont de la forme $\xi + \left(p + \frac{1}{2}\right) h$, $p \in \mathbb{Z}$.

Montrer que, lorsque h tend vers zéro, l'expression

$$h \operatorname{Log} \prod_{j=0}^{n_h} \left| \frac{x_j^2 - \xi^2}{x_j^2 + 1} \right|$$

tend vers une limite, que l'on calculera.

9° Étant donné des nombres ξ et a vérifiant les conditions du 8° et étant donné un nombre $h > 0$, on note $\Pi_h^{(\xi, a)} f$ le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ aux points x_j et $-x_j$, $0 \leqslant j \leqslant n_h$, ces points étant définis comme au 8°.

Montrer que, pour certaines valeurs des nombres ξ et a,

$$\lim_{h \to 0} | f(\xi) - \Pi_h^{(\xi, a)} f(\xi) | = 0,$$

alors que, pour d'autres valeurs des nombres ξ et a,

$$\lim_{h \to 0} | f(\xi) - \Pi_h^{(\xi, a)} f(\xi) | = + \infty.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail